**El contenido temático está diseñado para cumplir con los requisitos básicos del curso de geometría y trigonometría.**

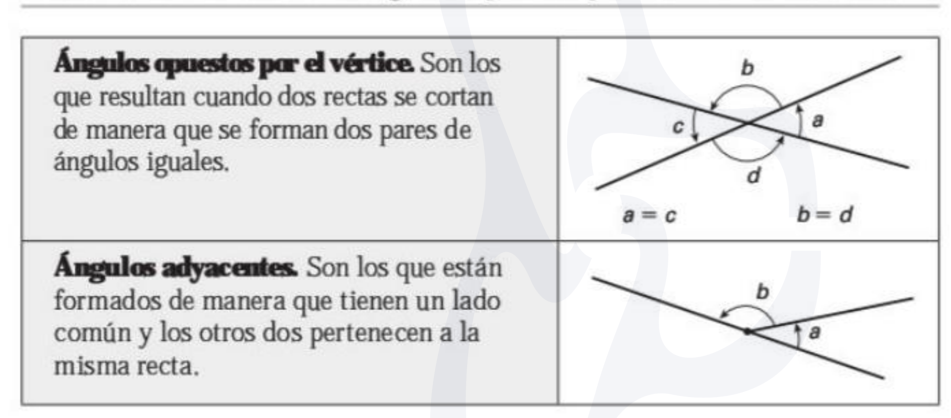
## I. Triángulos y ángulos

Distinguir los tipos de ángulos y triángulos. • Realizar inferencias y conclusiones sobre figuras geométricas. • Aplicar las propiedades de ángulos y triángulos en la resolución de problemas.

*1.- Clasificación de los ángulos por la posición de sus lados*

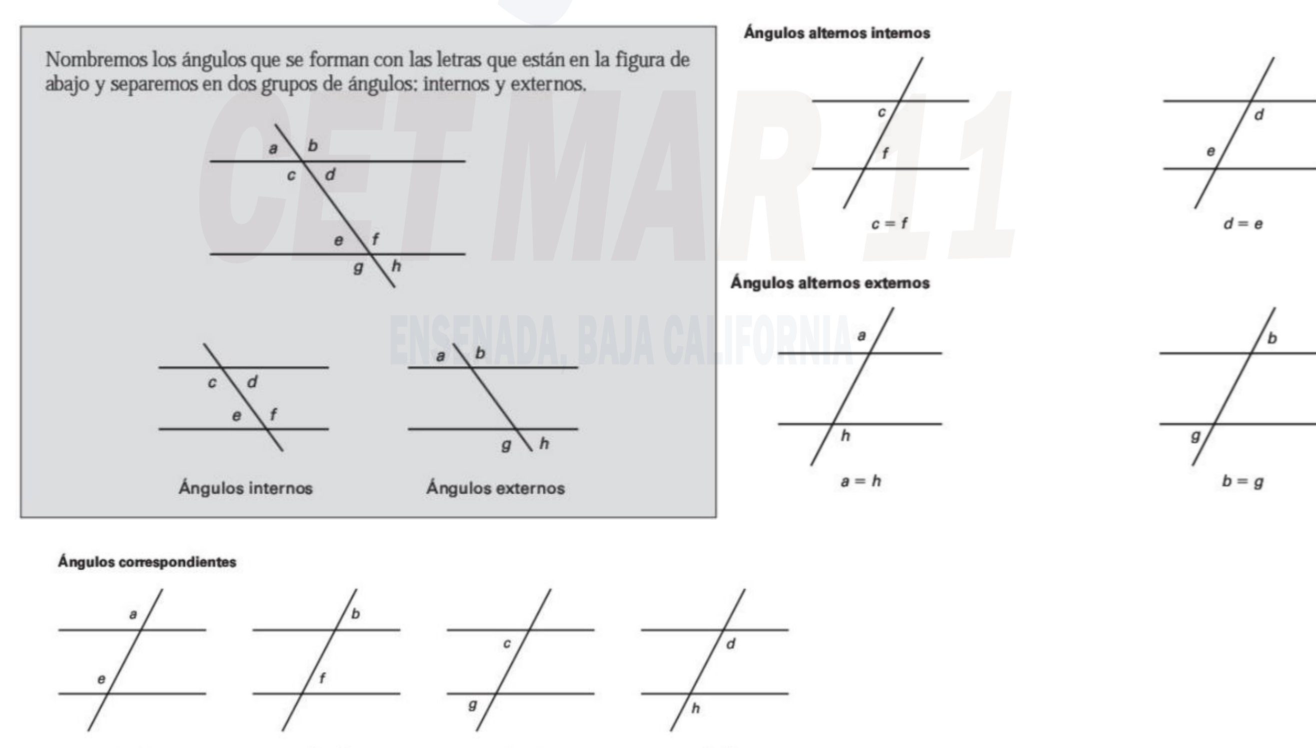
Definición: ángulo es la abertura que se genera entre la posición inicial y la posición final de una semirrecta cuando ésta gira sobre uno de sus puntos extremos llamado vértice.

### Clasificación de los ángulos por la posición de sus lados



| | |
|---|---|
| **Ángulos opuestos por el vértice.** Son los que resultan cuando dos rectas se cortan de manera que se forman dos pares de ángulos iguales. | b, c, a, d<br>a = c   b = d |
| **Ángulos adyacentes.** Son los que están formados de manera que tienen un lado común y los otros dos pertenecen a la misma recta. | b, a |

### Ángulos formados por dos rectas secantes o dos paralelas cortadas por una transversal






C. M. L

*2. Clasificación de los ángulos por la suma de sus medidas*

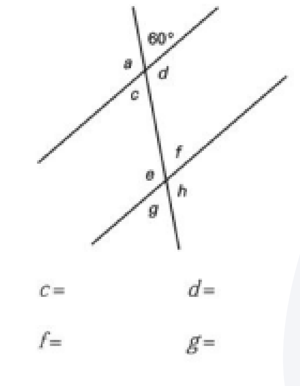
| Ángulos | Medida | Dibujo |
|---|---|---|
| Complementarios | $\mu + \varnothing = 90°$ | $\varnothing$ $\mu$ |
| Suplementarios | $\mu + \varnothing = 180°$ | $\varnothing$ $\mu$ |
| Conjugados | $\mu + \varnothing = 360°$ | $\mu$ $\varnothing$ |

# Ejemplos:

| Ángulo | Complemento | Suplemento | Conjugado |
|---|---|---|---|
| 20° | 70° | 160° | 340° |
| 20° | 70° 20° | 160° 20° | 20° 340° |

## Evidencias de aprendizaje 1.

**1.** En la figura mostrada, determina el valor de cada ángulo.

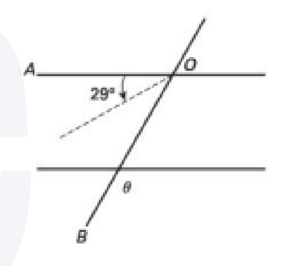



$a =$ $c =$ $d =$

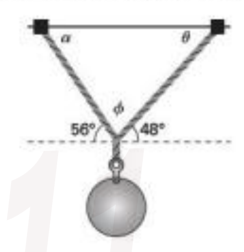
$e =$ $f =$ $g =$

$h =$

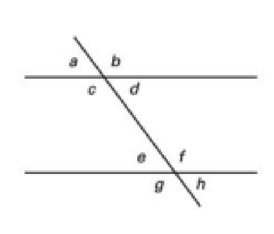
**2.** En la figura mostrada, determina el valor del ángulo $\theta$ si el ángulo dado de 29° es la mitad de $\angle AOB$.




**3.** En la figura mostrada, determina el valor de los ángulos $\alpha$, $\phi$ y $\theta$.




4. En la tabla a la derecha del dibujo, escribe los nombres de los ángulos señalados.




| Ángulo | Nombre |
|---|---|
| $a = d$ | |
| $c = f$ | |
| $e = h$ | |
| $a = h$ | |
| $c = g$ | |

5. En la siguiente tabla, hay un ángulo de 42° encuentra sus ángulos complementario, suplementario y conjugado

| Ángulos | Complemento | Suplemento | Conjugado |
|---|---|---|---|
| 42° | | | |
| 42° | 42° | 42° | 42° |
| 60° | | | |
| 60° | 60° | 60° | 60° |

*3.- Clasificación de los triángulos por la medida de sus lados y ángulos*

*Definición de triángulo*

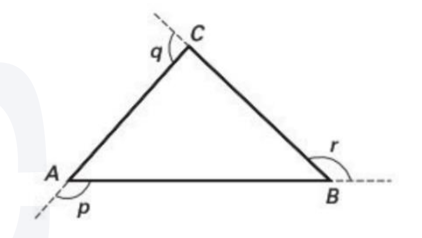
Es una figura geométrica formada por tres rectas que se cortan de dos en dos y que forman entre sí tres ángulos. Generalmente, un triángulo se indica con letras mayúsculas en sus vértices; para designar los lados opuestos a los vértices, se utiliza la letra minúscula correspondiente.

*Clasificación de los triángulos por la medida de sus lados y ángulos*

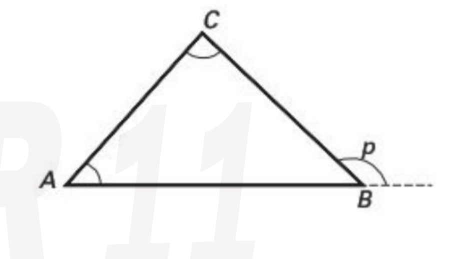
| | |
|---|---|
| **Equilátero.** Tiene tres lados iguales. | a a a |
| **Isósceles.** Tiene dos lados iguales. | b b a |
| **Escaleno.** Tiene tres lados desiguales. | b c a |
| **Rectángulo.** Tiene un ángulo recto. | |
| **Acutángulo.** Tiene tres ángulos agudos. | |
| **Obtusángulo.** Tiene un ángulo obtuso. | |

*Propiedades de los triángulos*

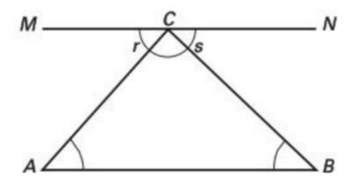
En todo triángulo, la suma de sus ángulos externos es igual a 360°.




En todo triángulo, un ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él

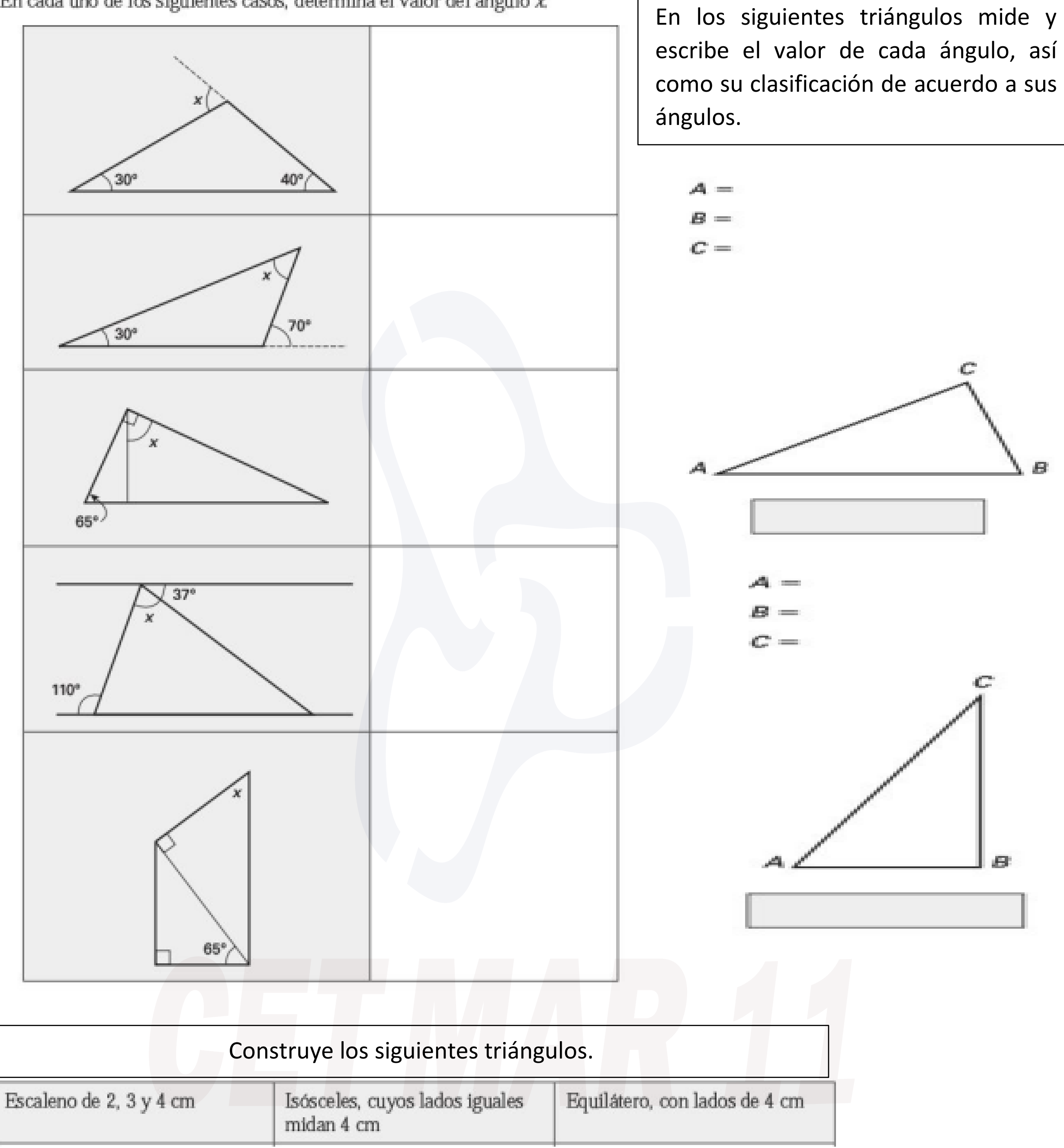



En todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a 180°.



## Evidencias de aprendizaje 2

En cada uno de los siguientes casos, determina el valor del ángulo $x$.




En los siguientes triángulos mide y escribe el valor de cada ángulo, así como su clasificación de acuerdo a sus ángulos.

Construye los siguientes triángulos.

| | | |
|---|---|---|
| Escaleno de 2, 3 y 4 cm | Isósceles, cuyos lados iguales midan 4 cm | Equilátero, con lados de 4 cm |

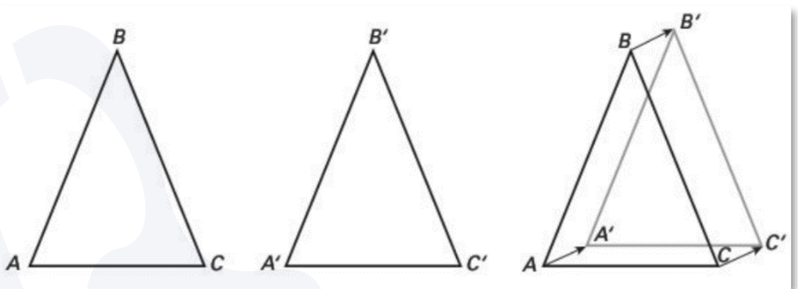
## *4.- Congruencia de triángulos*

- Distinguir los requisitos de cada uno de los criterios para la congruencia de triángulos.
- Aplicar los criterios de congruencia de triángulos para la resolución de problemas.
- Utilizar la imaginación espacial para visualizar triángulos congruentes.

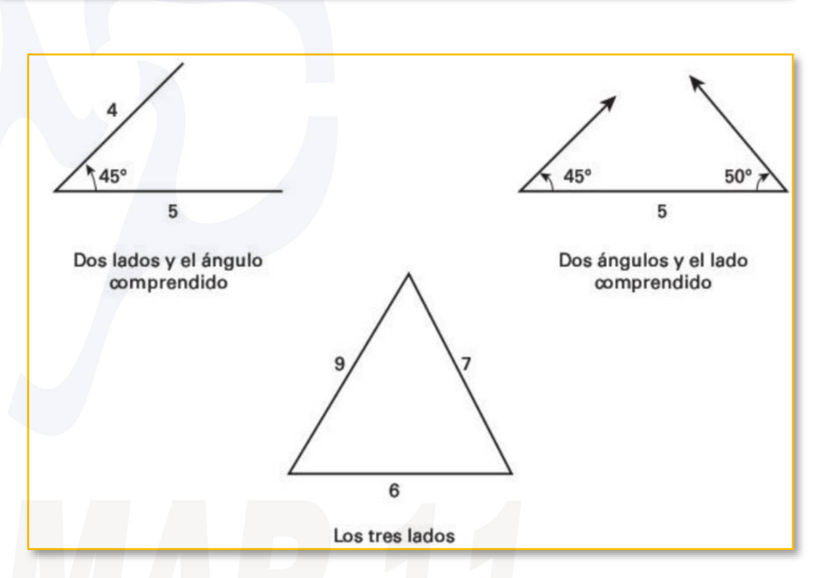
En geometría, a las figuras que tienen la misma forma e igual tamaño se les llama congruentes. También se requiere una definición apropiada para decidir cuándo dos figuras son iguales o congruentes.

Así, por ejemplo, si sobreponemos los triángulos ABC y A'B'C', y vemos que coinciden sus tres lados y sus tres ángulos, decimos que son congruentes.

Por lo tanto: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$




Sin embargo, para construir un triángulo, es necesario conocer únicamente tres partes de éste. Se sabe que el tamaño y la forma del triángulo quedan definidos totalmente si se cuenta con la siguiente información.



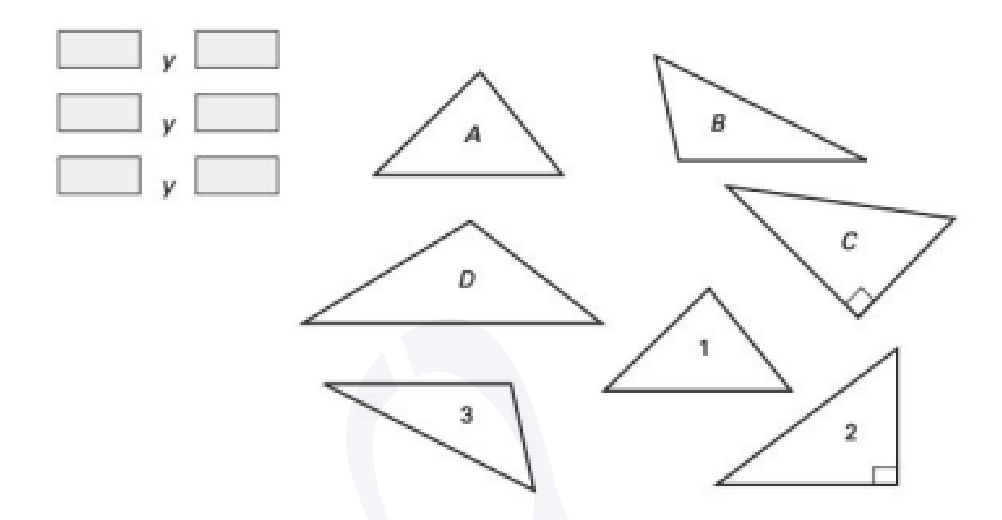



Postulados de congruencia de triángulos

| Postulado | Figura 1 | Figura 2 |
|---|---|---|
| Dos ángulos y el lado comprendido entre éstos<br>$A = A'$<br>$B = B'$<br>$c = c'$ | C, A, B, c | C', A', B', c' |
| Dos lados y el ángulo comprendido entre éstos<br>$A = A'$<br>$b = b'$<br>$c = c'$ | C, b, A, B, c | C', b', A', B', c' |
| Los tres lados iguales<br>$a = a'$<br>$b = b'$<br>$c = c'$ | A, C, B | A', C', B' |

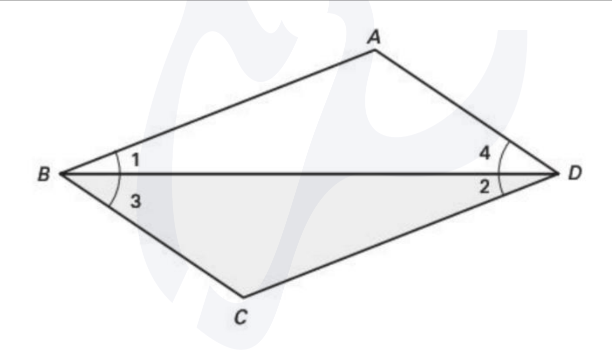
## Evidencias de aprendizaje

Desde tu perspectiva, ¿cuáles triángulos son congruentes en la serie que aparece abajo?




Reflexiona y explica por qué el triángulo ABD es congruente con el triángulo CDB a partir del conocimiento de que:

$\angle 1 = \angle 2$, y que $\angle 3 = \angle 4$.



## 4.- Semejanza de triángulos

Identificar las características de triángulos semejantes.

- Enunciar y comprender los criterios de semejanza de triángulos.
- Enunciar y comprender el teorema de Tales.
- Enunciar y comprender el teorema de Pitágoras.
- Describir relaciones de proporcionalidad entre catetos e hipotenusa al trazar la altura sobre ésta.

*Semejanza de triángulos*

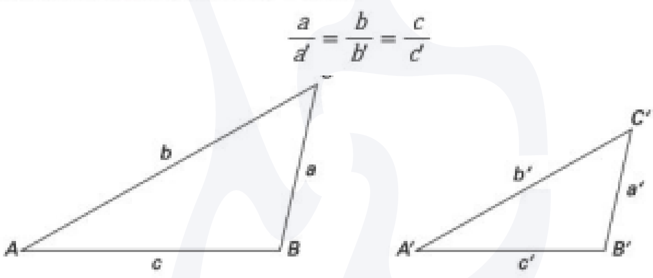
Las figuras geométricas son semejantes cuando tienen la misma forma, aun cuando no tengan el mismo tamaño.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus respectivos ángulos iguales y sus lados respectivamente pr

Estos triángulos son semejantes porque tienen sus ángulos respectivamente iguales:

$$\angle A = \angle A'; \quad \angle B = \angle B'; \quad \angle C = \angle C'$$

y sus lados son proporcionales, es decir,

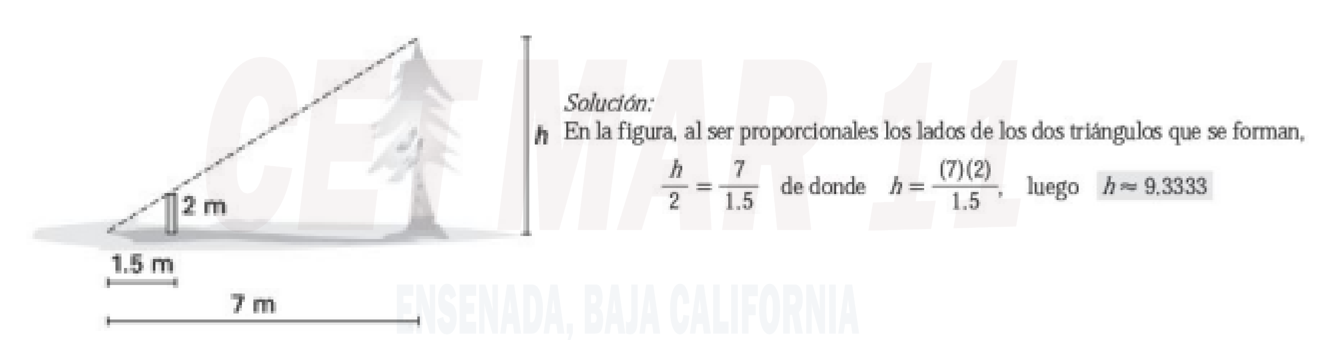


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



Las razones de esta proporcionalidad también reciben el nombre de razón de semejanza

Calculemos la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7 metros. Se sabe que, en el mismo plano, una barra vertical que mide 2 metros de altura proyecta una sombra de 1.5 metros, como se muestra en la figura





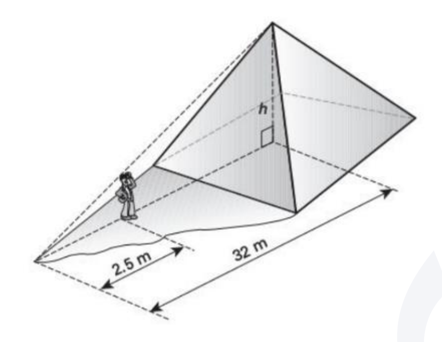
*Solución:*

En la figura, al ser proporcionales los lados de los dos triángulos que se forman,

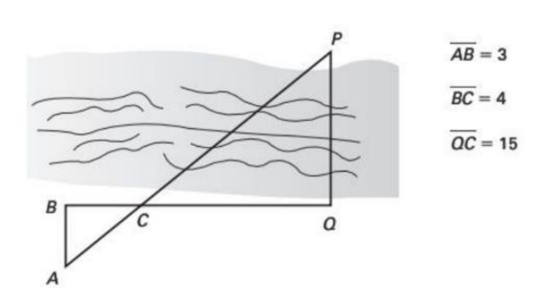
$$\frac{h}{2} = \frac{7}{1.5} \quad \text{de donde} \quad h = \frac{(7)(2)}{1.5}, \quad \text{luego} \quad h \approx 9.3333$$

## Evidencias de aprendizaje 4

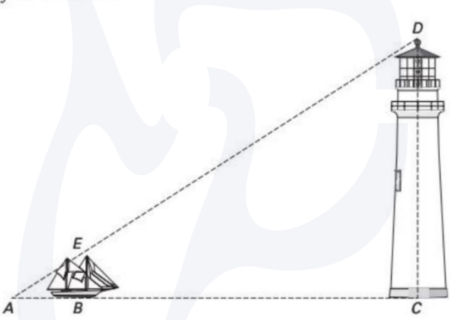
Calcula la altura de la pirámide de la figura si un hombre que mide 1.80 metros de estatura proyecta una sombra de 2.5 metros cuando la sombra de la pirámide mide 32 metros.




Como es prácticamente imposible medir el ancho de un río, se han hecho los trazos indicados en la figura con las medidas ahí señaladas con la finalidad de hacer el cálculo. ¿Cuál es la distancia $PQ$ correspondiente al ancho del río?




En la figura de abajo calcula la distancia $BC$, dado que $AB = 12$ m, $EB = 8$ m y $CD = 120$ m.




Con frecuencia es necesario utilizar las escalas en los planos de las construcciones para facilitar su interpretación y el diseño arquitectónico. Por ejemplo, si decimos que un plano tiene una escala de 1:1001 esto significa que 1 cm en el plano corresponde a 100 cm en la realidad. Dicho de otra forma, 1 cm en el plano representa 1 m.

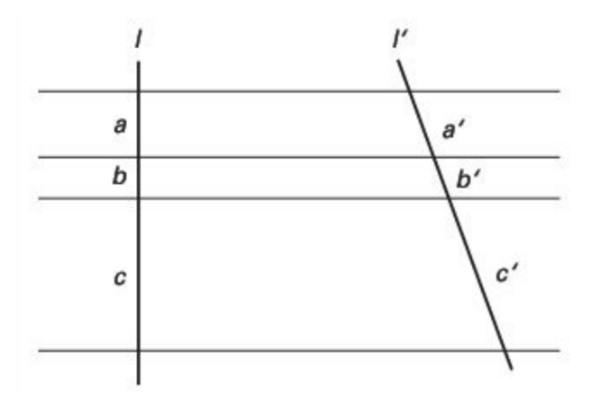
Supón que, en un plano, un salón mide 6 cm de longitud por 4 cm de ancho. Si queremos saber su superficie real, ¿qué cálculos tendríamos que hacer?

Explica

*Teorema de Tales*

El teorema de Tales establece lo siguiente: Sí varias rectas paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

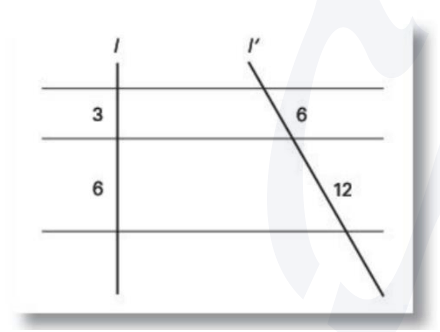
Observa en el dibujo que en la recta l los segmentos a, b y c son proporcionales a los correspondientes a', b' y c' de la recta /'. Es decir, en términos algebraicos esto se expresa como




$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

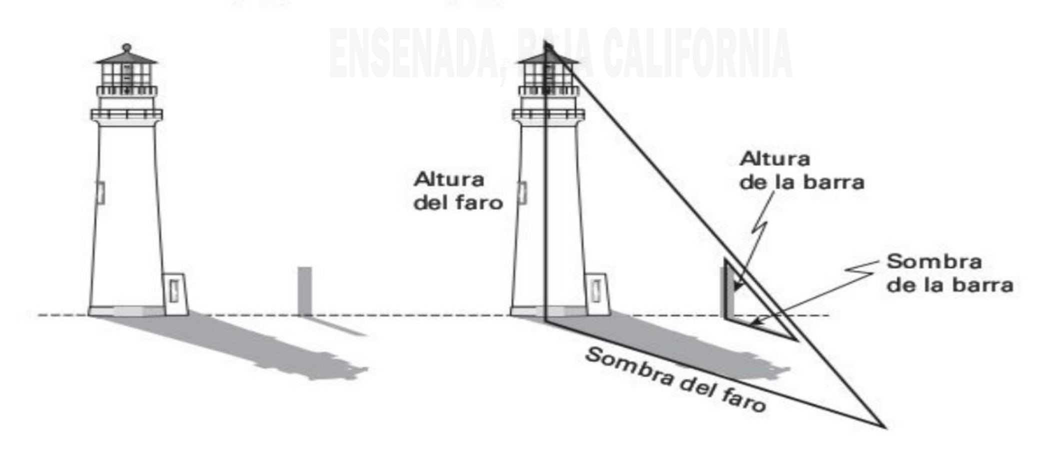
Una ilustración concreta de este teorema sería la siguiente:

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$




Analiza el siguiente dibujo y observa que el faro y su sombra, por un lado, y una barra y su sombra, por otro, tienen un gran parecido con el teorema de Tales. De acuerdo con las actividades anteriores podríamos determinar la altura del faro utilizando la proporcionalidad que hay entre las alturas y las sombras.

$$\frac{faro}{su\ sombra} = \frac{barra}{su\ sombra}$$

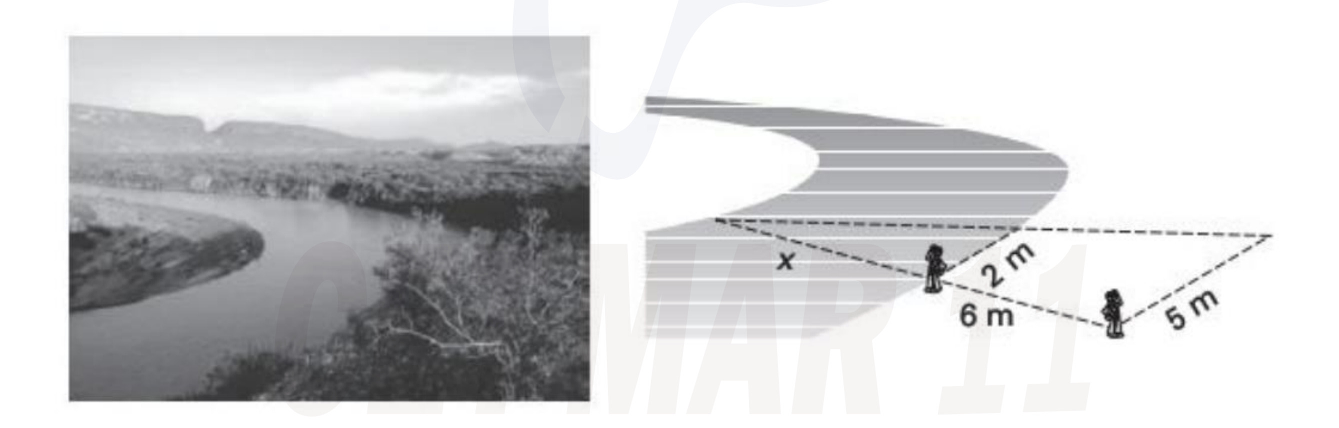


## Evidencias de aprendizaje 5

1. Calcula la altura de una farola que proyecta una sombra de 8 metros, si una barra de 2 metros proyecta una sombra de 2.5 metros.

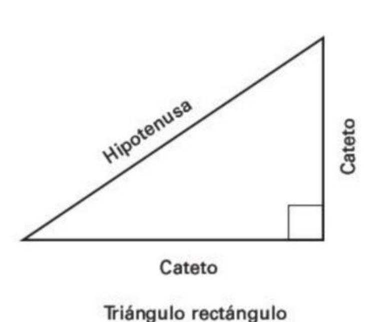
2. Calcula la altura de un bloque de pisos cuya sombra mide 25 metros, si una barra de 2 metros proyecta una sombra de 1.7 metros.

3. Para medir la anchura del río Bravo se colocaron dos personas alineadas con una piedra de forma tal, que entre ellas había una distancia de 6 metros (véase la siguiente figura). Ambas personas caminan paralelamente al río y en la misma dirección hasta que vuelven a estar alineadas con la piedra. La más cercana a la orilla ha caminado 2 metros y la otra, 5 metros. Con estos datos, ¿serías capaz de calcular el ancho del río?

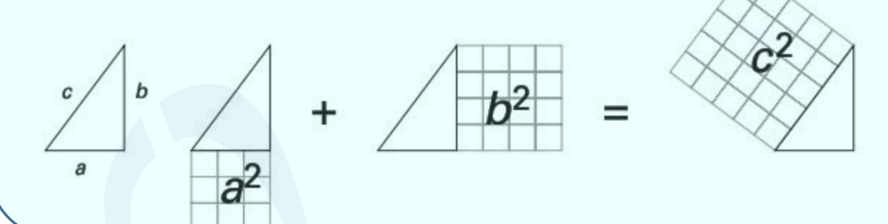


**Teorema de Pitágoras**

El teorema dice que el área de un cuadrado construido con la hipotenusa como lado de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo.

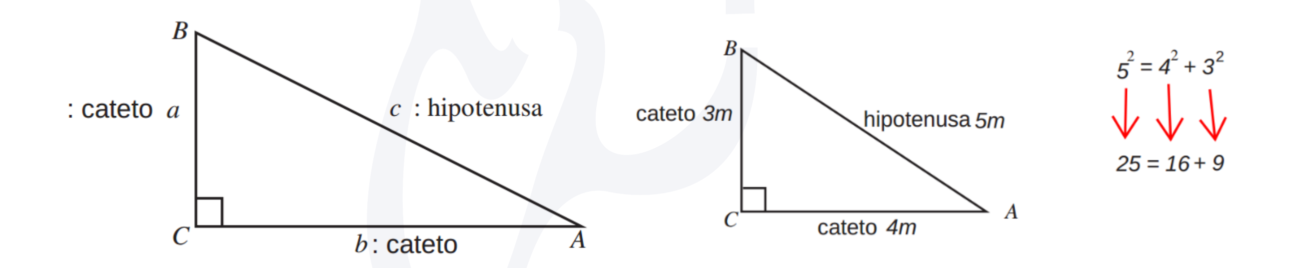



. Si ABC es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.




## Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.




Determina el valor de la hipotenusa, cateto a y cateto b del triángulo que se muestra, según los datos proporcionados en cada uno de los siguientes incisos:

a) b = 16, c = 20 b) a = 3, c = 5 c) a = 9, b = 12

***a)*** b = 16, c = 20

**$a^2 = c^2 - b^2$**

$a^2 = (20)^2 - (16)^2$

$a^2 = 400 - 256$

$a^2 = 144$

$a = \sqrt{144} = 12$

***b)*** a = 5, c = 6

**$b^2 = c^2 - a^2$**

$b^2 = (5)^2 - (3)^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

$b = \sqrt{16} = 4$

***c)*** a = 12, b = 9

**$c^2 = a^2 + b^2$**

$c^2 = (9)^2 + (12)^2$

$c^2 = 81 + 144$

$c^2 = 225$

$c = \sqrt{225} = 15$

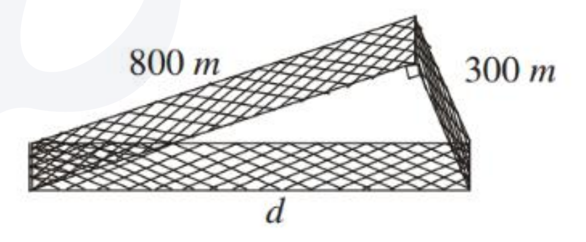
## Evidencias de aprendizaje 6

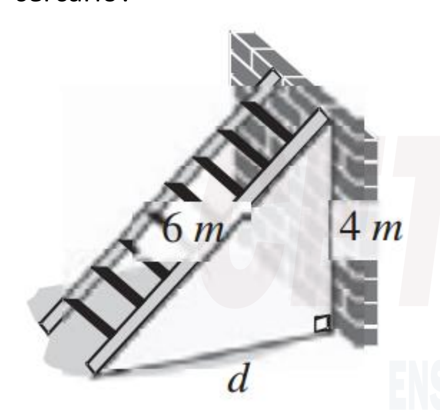
Si a y b son los catetos de un triángulo y c su hipotenusa, determina el lado que falta:

| | | |
|---|---|---|
| 1. a = 15, b = 20 5. | a = 12, c = 20 9. | a = 6 m y b = 3 |
| **c=** | **b=** | **c=** |
| 2. a = 5, b = 4 | b = 6, c = 8 | a = 12 m y c = 13 m |
| **c=** | **a=** | **b=** |
| 3. a = 8, b = 4 cm | b = 15, c = 17 | a = 14 cm y b = 15 |
| **c=** | **a=** | **c=** |
| 4. a = 7, b = 7 dm | a = 5, c =10 | b = 15 dm y c = 20 |
| **c=** | **b=** | **a=** |

**Resuelve los siguientes problemas:**

1. Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 300 y 800 m. ¿Qué cantidad de maya se necesita para cercarlo?




2. Con una escalera de 6 m se desea subir al extremo de una barda de 4 m de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?

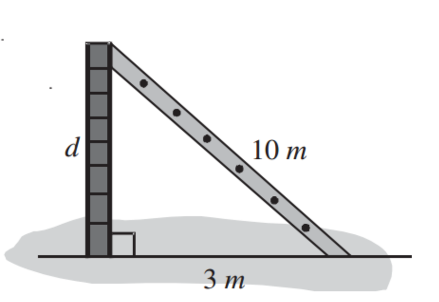


3. Calcula la altura de un triángulo isósceles si su base mide 60 cm y cada uno de sus lados mide 50 cm.

4. Calcula la altura de un triángulo equilátero que de lado mide 10 cm.

5. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, cuya diagonal mide 8 m?

6. ¿A qué altura llega una escalera de 10 m de largo en un muro vertical, si su pie está a 3 m del muro?

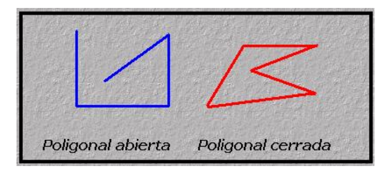


## Polígonos

Etimológicamente la palabra polígono proviene de las raíces "POLI" que significa muchos y "GONOS" que significa ángulos, por lo tanto en un TRAZO QUE TIENE MUCHOS LADOS.

También se define como las figuras planas formadas por la unión de tres o más segmentos que forman una línea quebrada cerrada llamada línea poligonal.

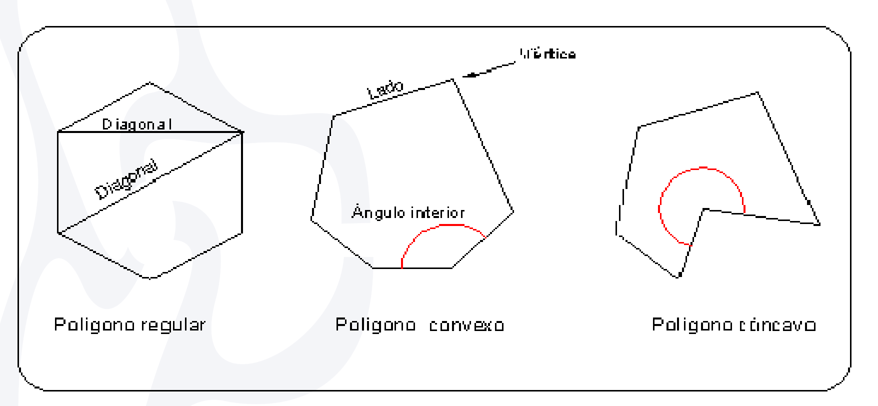
**LÍNEAS POLIGONALES:** existen dos tipos de líneas, la quebrada que no forma polígonos, y la cerrada que es la que forma los polígonos.




**CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS**
Se han establecido tres distintas clasificaciones de los polígonos:

1.- Por la amplitud de sus ángulos, los polígonos pueden ser clasificados como:

*A)* ***CONVEXOS:*** son aquellos cuyos ángulos son todos menores de 180º y solo pueden ser cortados por dos puntos mediante una recta secante.



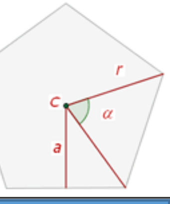

*B)* ***CONCAVOS:*** Son los que tienen uno o varios ángulos mayores de 180º y pueden ser cortados en más de dos puntos por una recta secante.

**2.- Por la medida de sus lados y sus ángulos pueden clasificarse en:**

***A) Regulares****:* son aquellos que tienen sus lados y ángulos iguales, es decir, que son equiláteros y equiángulos.

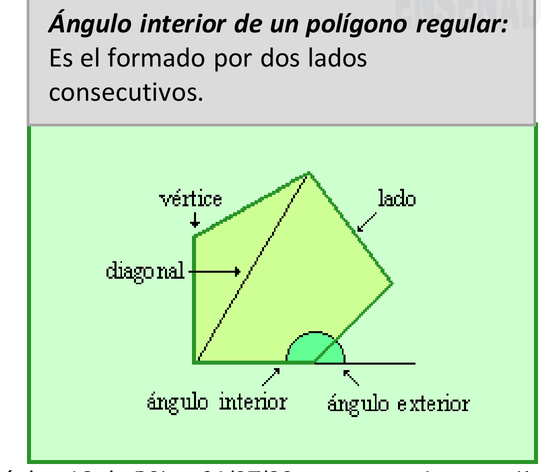
Los principales elementos de un polígono regular son:

***Centro (C ):*** Punto interior que está a la misma distancia de cada vértice.
***Radio (r ):*** Es el segmento que va del centro a cada vértice
***Apotema (a )****:* Distancia del centro al punto medio de un lado.



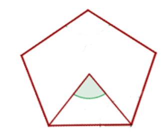



***Ángulo interior de un polígono regular:*** Es el formado por dos lados consecutivos.



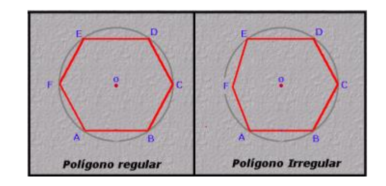

***Ángulo exterior de un polígono regular: Es*** el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.

*La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es de 360˚*



***Angulo central: Es*** el formado por dos radios consecutivos. Si **n** es el número de lados, entonces el ángulo central será.

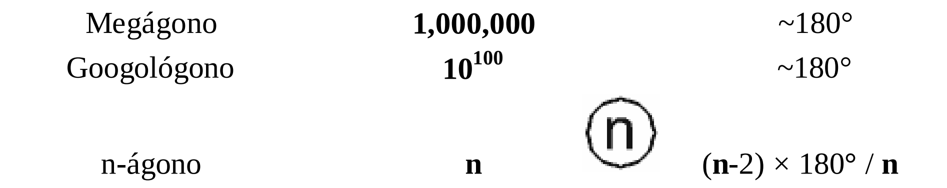
$$\text{Ángulo central} = \frac{360°}{n}$$




**B)** *Irregulares:* los que tienen a lo menos un lado con distinta medida o sus ángulos son diferentes.

**NOMBRE DE LOS POLÍGONOS REGULARES DE ACUERDO AL NÚMERO DE LADOS**

| Nombre | Lados | Forma | Ángulo interior |
|---|---|---|---|
| Triángulo *(o trígono)* | **3** | | 60° |
| Cuadrilátero *(o tetrágono)* | **4** | | 90° |
| Pentágono | **5** | | 108° |
| Hexágono | **6** | | 120° |
| Heptágono *(o Septágono)* | **7** | | 128.571° |
| Octágono | **8** | | 135° |
| Nonágono *(or eneágono)* | **9** | | 140° |
| Decágono | **10** | | 144° |
| Endecágono *(or undecágono)* | **11** | | 147.273° |
| Dodecágono | **12** | | 150° |
| Tridecágono | **13** | | 152.308° |
| Tetradecágono | **14** | | 154.286° |
| Pentadecágono | **15** | | 156° |
| Hexadecágono | **16** | | 157.5° |
| Heptadecágono | **17** | | 158.824° |
| Octadecágono | **18** | | 160° |
| Eneadecágono | **19** | | 161.053° |
| Icoságono | **20** | | 162° |
| Triacontágono | **30** | | 168° |
| Tetracontágono | **40** | | 171° |
| Pentacontágono | **50** | | 172.8° |
| Eneacontágono | **90** | | 176° |
| Hectágono | **100** | | 176.4° |
| Chiliágono | **1,000** | | 179.64° |
| Miriágono | **10,000** | | 179.964° |



| | | |
|---|---|---|
| Megágono | **1,000,000** | ~180° |
| Googológono | **$10^{100}$** | ~180° |
| n-ágono | **n** | (**n**-2) × 180° / **n** |

**Clasificación de los cuadriláteros convexos**

| Clasificación | Subclasificación | Característica | Figura |
|---|---|---|---|
| PARALELOGRAMOS<br>Tienen sus lados paralelos dos a dos | Cuadrado | ■ Sus cuatro lados son iguales<br>■ Sus cuatro ángulos son rectos | |
| | Rectángulo | ■ Sus lados opuestos son iguales<br>■ Sus cuatro ángulos son rectos | |
| | Rombo | ■ Sus cuatro lados son iguales<br>■ Sus ángulos opuestos son iguales | |
| | Romboide | ■ Sus lados opuestos son iguales<br>■ Sus ángulos opuestos son iguales | |
| TRAPECIOS<br>Tienen dos lados opuestos paralelos y los otros dos no | Rectángulo | ■ Tiene un lado perpendicular a sus bases | |
| | Isósceles | ■ Tiene los dos lados no paralelos de igual longitud<br>■ Los ángulos que forman los lados no paralelos con las bases son iguales | |
| | Escaleno | ■ La medida de sus lados no paralelos es diferente<br>■ La medida de sus lados paralelos es diferente | |
| TRAPEZOIDES<br>No tienen ningún lado paralelo | Simétrico | ■ Tienen dos lados consecutivos de igual longitud<br>■ Los otros dos lados son iguales pero diferentes al primer par | |
| | Asimétrico | ■ Sus cuatro lados tienen medidas diferentes<br>■ Sus ángulos son diferentes | |



## Ángulos interiores de un polígono

*La suma de ángulos interiores* (AI) *de un polígono convexo de* n *lados es igual al número de lados del polígono menos dos* (n -2) *por 180°.*

$$AI = 180°(n-2)$$

De lo anterior se obtiene el siguiente corolario:

*En un polígono regular de* **n** *lados, cada uno de sus ángulos interiores* $\angle i$ *se obtiene al dividir* **AI** (suma de los ángulos interiores) *entre* **n** (número de lados) *, esto es:*

$$\measuredangle i = \frac{AI}{n} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

## Diagonales en los polígonos

*El número de diagonales* d *que se pueden trazar desde un mismo vértice de un polífono convexo de* n *lados es igual al número de lados menos tres.*

$$d = n - 3$$

*El número total de diagonales* **D** *que pueden trazarse desde todos los vértices de un polígono convexo de* **n** *lados es igual a la mitad del producto del número de lados por el número de lados disminuido en tres.*

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

**Ejemplos:**

**1. Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono de 15 lados.**

Solución: AI = 180˚ (n – 2)

Sustituyendo: AI = 180˚ (15 – 2) = 180 (13) = 2340˚

**2. Calcular la medida del ángulo central de un pentágono regular.**

Solución n= 5 medida del ángulo central $= \frac{360}{5} = 72^\circ$

**3. Calcular la medida del ángulo interior de un pentágono regular.**

Solución $\angle i = \frac{180^\circ\,(n-2)}{n}$ $n=5$

$$\angle i = \frac{180^\circ\,(5-2)}{5}$$

$$\angle i = \frac{180^\circ\,(3)}{5} = 108^\circ$$

## Evidencias de aprendizaje 6

I. Resuelve lo que se solicita:

1. Calcular el número de lados de un polígono regular cuyo ángulo interior mide. 140˚

2. Calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en un Hexágono.

3. ¿En qué polígono se cumple que el número de lados es igual al número de diagonales?

II. Consulta la clasificación de los polígonos para llenar la siguiente tabla:

| Número de lados | Nombre |
|---|---|
| | Triángulo |
| 4 | |
| | Pentágono |
| 6 | |
| | Heptágono |
| 8 | |
| | Nonágono |
| 10 | |
| | Endecágono |
| 12 | |
| | Pentadecágono |
| 17 | |
| | Icoságono |

III. Resuelve lo siguiente:

a) La medida de un ángulo exterior de un polígono regular de ocho lados es:

b) Si la medida de un ángulo exterior de un polígono regular es 30° entonces, el número de lados es:

c) Si la medida de un ángulo exterior de un polígono regular es 36° entonces, el ángulo interior mide:

d) En el heptágono regular, la medida de cada ángulo interior es:

e) La fórmula que permite calcular la medida de un ángulo interior de un polígono regular de *n* lados es:

f) La medida de cada ángulo exterior en un polígono regular de trece lados es:

# Circunferencia

La circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos están en un mismo plano y a igual distancia de otro punto interior fijo llamado centro.

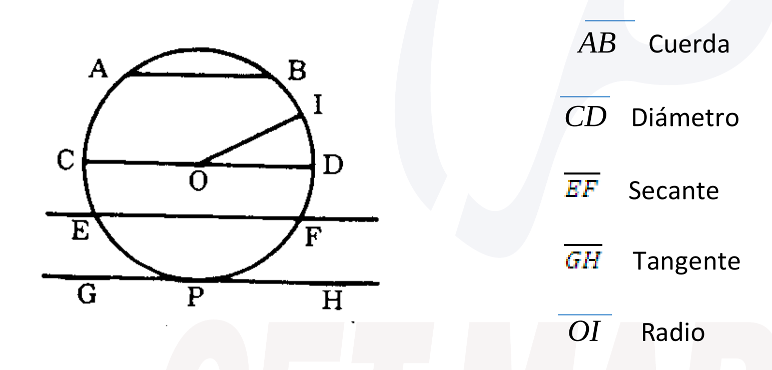
El círculo es la superficie del plano limitada por una circunferencia.




Como se puede observar, la circunferencia es una línea y por lo tanto solo tiene longitud, mientras que el círculo es una superficie y por lo tanto tiene área.

La circunferencia o círculo se representan con el símbolo $\Theta$, la diferencia se obtienen del contexto.

**Líneas Notables**



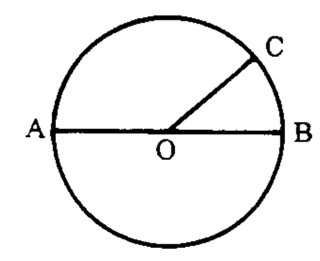

**Cuerda:** Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.

**Diámetro:** Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

**Secante**: Es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos (partes).

**Tangente**: Es la recta que toca a la circunferencia en un punto. Este punto único se llama punto de tangencia o de contacto.

**Radio**: Es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.



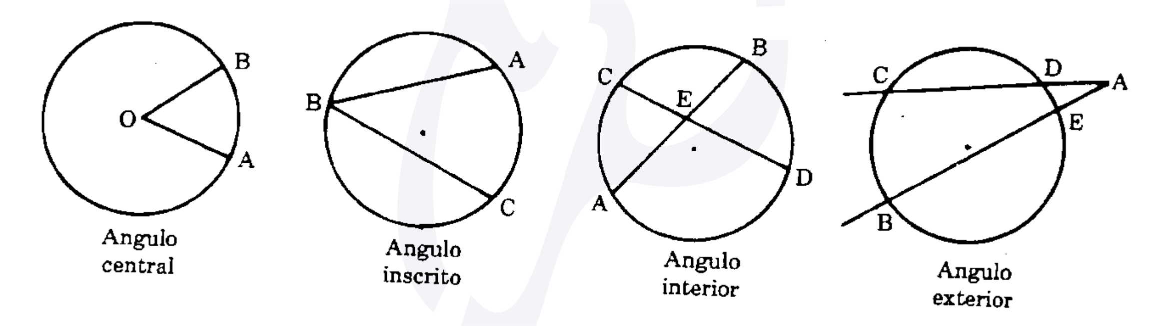

$\overset{\frown}{AC}$ arco AC; $\overset{\frown}{BC}$ arco BC; $\overset{\frown}{ACB}$ arco ACB; $\overset{\frown}{CAB}$ arco CAB

**Arco:** Es una parte de la circunferencia. Un arco se representa así: $\frown$ y se lee "arco".
**Semicircunferencia:** Es un arco de longitud igual a la mitad de la circunferencia.
**Arco menor:** Es aquel que mide menos que una semicircunferencia.
**Arco mayor:** Es aquel que mide más que una semicircunferencia.

En la figura anterior $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{ABC}$ son respectivamente, un arco menor y un arco mayor. El uso de las tres letras, en el segundo caso, es indispensable para distinguir los dos arcos.

El arco $\overset{\frown}{ACB}$ es una semicircunferencia. En lo sucesivo la palabra arco se referirá a un arco menor, a menos que se especifique lo contrario.

## ÁNGULOS NOTABLES




1. **La medida de un ángulo central es igual a la del arco comprendido entre sus lados.**

$$\angle O = \overset{\frown}{BA} \qquad \text{(Ver figura arriba)}$$

2. **Todo ángulo inscrito** en una circunferencia tiene por medida la mitad de la del arco comprendido entre sus lados.

$$\angle B = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \qquad \text{(Ver figura arriba)}$$

3. Todo ángulo formado por dos cuerdas que se cortan **(ángulo interior)** tiene por medida la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados.

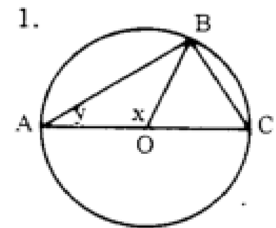
$$\measuredangle AEC = \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{2} \qquad \text{(Ver figura arriba)}$$

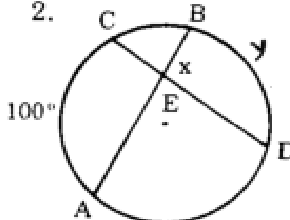
4. Todo ángulo formado por dos secantes que se cortan fuera de la circunferencia **(ángulo exterior)** tiene por medida la semidiferencia de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados.

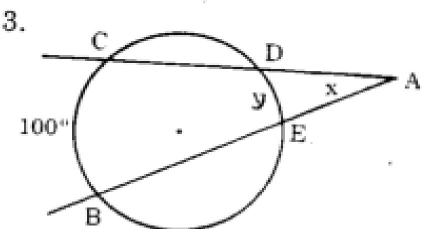
$$\measuredangle A = \frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{2} \qquad \text{(Ver figura arriba)}$$

Ejemplos

**Hallar los ángulos que se piden en las siguientes figuras:**




Soluciones:

**1.** $\angle x = AB$ , por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = 110°$

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{AB} = 180° - 110° = 70°$

Por lo tanto $\angle y = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{70°}{2} = 35°$

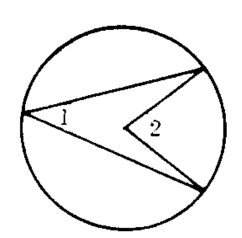
**3.** $\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2} = \dfrac{100° - 40°}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

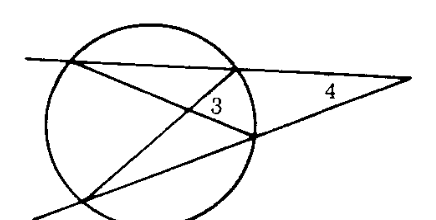
**2.** $\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow 85° = \dfrac{100 + \overset{\frown}{y}}{2} \Rightarrow 170° = 100° + \overset{\frown}{y}$

Por lo tanto $\overset{\frown}{y} = 170° - 100° = 70°$

## Evidencias de aprendizaje 7

**1.** Dar el nombre que corresponde a cada uno de los siguientes ángulos:




∡1 =

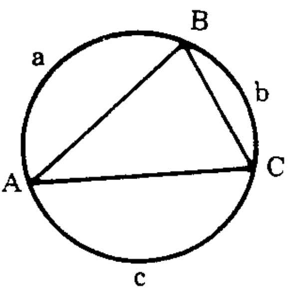
∡2 =

∡3 =

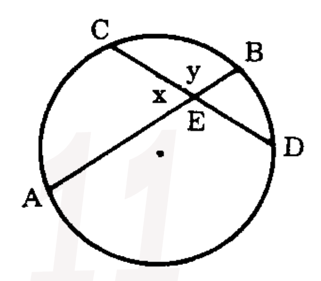
∡4 =

Resolviendo problemas de ángulos notables.

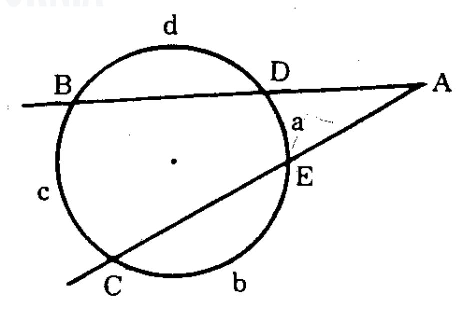
2. Si ABC es un triángulo inscrito, como se ilustra, hallar :
   a) $\angle A$ si arco $\overset{\frown}{a} = 100^\circ$ y arco $\overset{\frown}{c} = 200^\circ$
   b) $\angle A$ si AB ⊥BC y $\overset{\frown}{a} = 100^\circ$
   c) $\angle A$ si AC es un diámetro y $\overset{\frown}{a}$ $100^\circ$
   d) $\angle B$ si $\overset{\frown}{ABC} = 235^\circ$
   e) $\angle B$ si $\overset{\frown}{a} = 75^\circ$ y $\overset{\frown}{c} = 2\ \overset{\frown}{b}$




3. Si AB y CD son cuerdas que se cortan en E. como se ilustra, hallar:
   a) $\angle x$ si $\overset{\frown}{AC} = 90^\circ$ y $\overset{\frown}{BD} = 70$
   b) $\angle x$ si $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BD}$ miden $60^\circ$ cada uno. c)
   $\angle x$ si $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = 210^\circ$
   d) $\angle x$ si ~~BC + AD =~~ $150^\circ$
   e) $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}$ si $\angle x = 85^\circ$
   f) $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}$ si $\angle x = 100^\circ$




4. Si AB y AC son secantes que se cortan en A, como se lustra, hallar:
   a) $\angle A$ si $\overset{\frown}{c} = 90^\circ$ y $\overset{\frown}{a} = 40^\circ$
   b) $\angle A$ si $\overset{\frown}{c} - \overset{\frown}{a} = 82^\circ$
   c) $\angle A$ si $\overset{\frown}{c} = \overset{\frown}{a} + 40^\circ$



# Trigonometría

Definición de trigonometría
Definición de las funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°
Resolución de triángulos rectángulos

***Definición de trigonometría*** Es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estas relaciones son de utilidad para calcular los elementos de interés que son desconocidos en los triángulos.

Etimológicamente, trigonometría es una palabra que proviene del griego y significa medida de triángulos.

***Definición de las funciones trigonométricas***

Antes de definir las funciones trigonométricas de ángulos agudos, vamos a caracterizar la manera de describir y nombrar los lados de un triángulo rectángulo en términos de sus ángulos agudos.

| Lado | Ángulo $B$ | Ángulo $C$ |
|---|---|---|
| $a$ | hipotenusa | hipotenusa |
| $b$ | cateto opuesto | cateto adyacente |
| $c$ | cateto adyacente | cateto opuesto |

C
b
a
A
c
B

Para definir las funciones trigonométricas, consideremos un ángulo agudo cualquiera de un triángulo rectángulo, por ejemplo, el Z.B. Las funciones trigonométricas se definen como se muestra en la tabla

| Nombre | Definición | Notación |
|---|---|---|
| seno de $B$ | $\dfrac{\text{cateto opuesto a } B}{\text{hipotenusa}}$ | sen $B$ |
| coseno de $B$ | $\dfrac{\text{cateto adyacente a } B}{\text{hipotenusa}}$ | cos $B$ |
| tangente de $B$ | $\dfrac{\text{cateto opuesto a } B}{\text{cateto adyacente a } B}$ | tan $B$ |
| cotangente de $B$ | $\dfrac{\text{cateto adyacente a } B}{\text{cateto opuesto a } B}$ | cot $B$ |
| secante de $B$ | $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } B}$ | sec $B$ |
| cosecante de $B$ | $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } B}$ | csc $B$ |

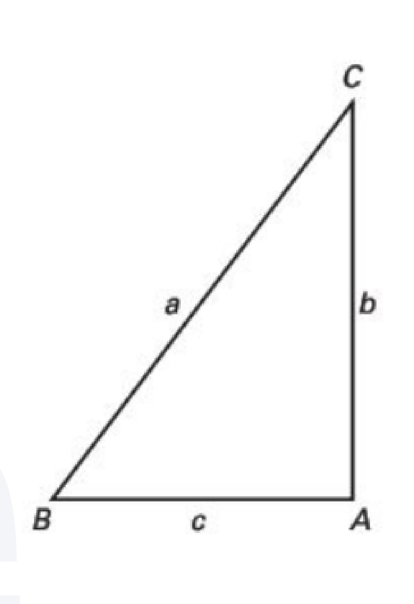
Considerando las definiciones anteriores y el triángulo que está a la derecha, completa las siguientes tablas.

| Funciones del $\angle B$ | Funciones del $\angle C$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen} B =$ | $\operatorname{sen} C =$ |
| $\cos B =$ | $\cos C =$ |
| $\tan B =$ | $\tan C =$ |
| $\cot B =$ | $\cot C =$ |
| $\sec B =$ | $\sec C =$ |
| $\csc B =$ | $\csc C =$ |

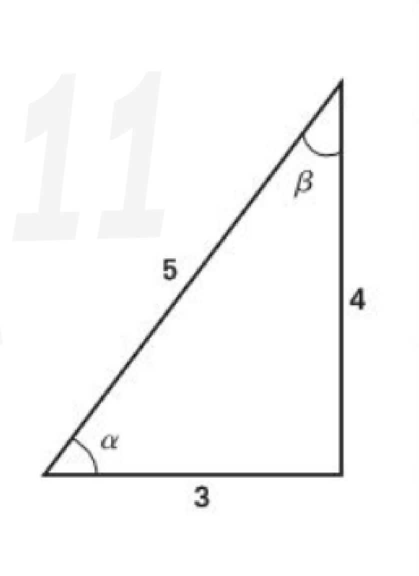
| Funciones del $\angle \alpha$ | Funciones del $\angle \beta$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen} \alpha =$ | $\operatorname{sen} \beta =$ |
| $\cos \alpha =$ | $\cos \beta =$ |
| $\tan \alpha =$ | $\tan \beta =$ |
| $\cot \alpha =$ | $\cot \beta =$ |
| $\sec \alpha =$ | $\sec \beta =$ |
| $\csc \alpha =$ | $\csc \beta =$ |

Las tablas anteriores debieron quedarte de la siguiente manera.

| Funciones del $\angle B$ | Funciones del $\angle C$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$ | $\operatorname{sen} C = \frac{c}{a}$ |
| $\cos B = \frac{c}{a}$ | $\cos C = \frac{b}{a}$ |
| $\tan B = \frac{b}{c}$ | $\tan C = \frac{c}{b}$ |
| $\cot B = \frac{c}{b}$ | $\cot C = \frac{b}{c}$ |
| $\sec B = \frac{a}{c}$ | $\sec C = \frac{a}{b}$ |
| $\csc B = \frac{a}{b}$ | $\csc C = \frac{a}{c}$ |

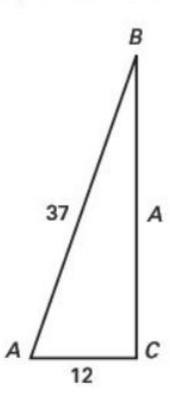



| Funciones del $\angle \alpha$ | Funciones del $\angle \beta$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ | $\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5}$ |
| $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ | $\cos \beta = \frac{4}{5}$ |
| $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ | $\tan \beta = \frac{3}{4}$ |
| $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ | $\cot \beta = \frac{4}{3}$ |
| $\sec \alpha = \frac{5}{3}$ | $\sec \beta = \frac{5}{4}$ |
| $\csc \alpha = \frac{5}{4}$ | $\csc \beta = \frac{5}{3}$ |

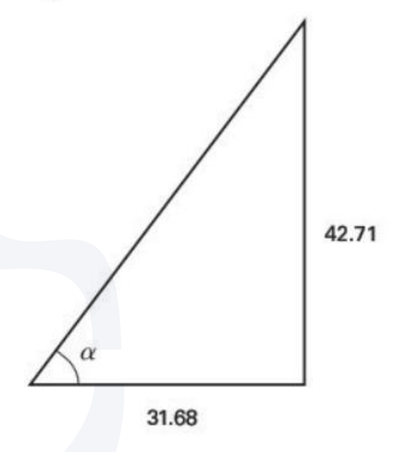


## Evidencias de aprendizaje 8

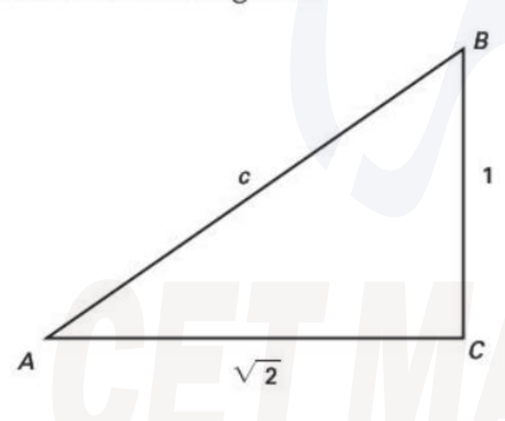
Para el triángulo de la figura, calcula las seis funciones del ángulo $A$.




En el siguiente triángulo, calcula las seis funciones del ángulo $\alpha$.




Calcula las seis funciones del ángulo $B$.



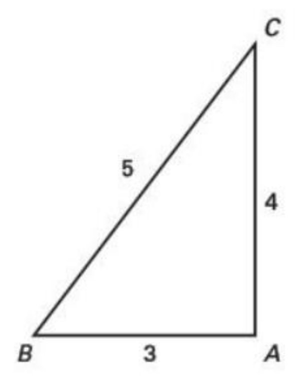



Dado el triángulo $BAC$ rectángulo en $A$, con $a = 5$ y $b = 4$ y $c = 3$, calcula los siguientes productos.

$\operatorname{sen} B \csc B =$

$\cos B \sec B =$

$\tan B \cot B =$



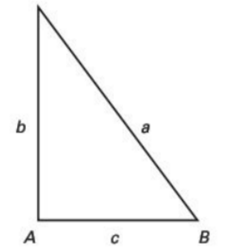
**Valores naturales de las funciones trigonométricas**

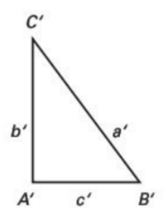
De acuerdo con las definiciones de funciones trigonométricas que hemos visto, podemos concluir que los valores de éstas son razones entre longitudes y que, además, esas razones son valores abstractos. Esto significa que cuando se tienen triángulos semejantes, las funciones trigonométricas son iguales e independientes de la magnitud de sus lados. Por ejemplo, por la semejanza de triángulos,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Por lo tanto,

$$\text{sen}\, B = \text{sen}\, B' = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$




Lo anterior nos demuestra que los valores de las funciones trigonométricas son independientes de la magnitud de los lados de un triángulo.

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos, en el pasado se elaboraron tablas que facilitaban los cálculos trigonométricos. En la actualidad, con el desarrollo de las calculadoras y la tecnología, esas tablas han caído en desuso. Sin embargo, te sugerimos que, para acrecentar tu cultura general y con el apoyo de tus maestros, investigues cómo estaban estructuradas esas tablas y cómo se realizaban los cálculos.

Dependiendo del tipo de calculadora que utilices, puedes calcular el valor de una función trigonométrica directa, o bien, realizar el procedimiento inverso.

De hecho, éstos son los dos tipos de problemas que enfrentaremos:

1. Dado un ángulo, calcular sus funciones trigonométricas, o

2. Dada una función trigonométrica, calcular el ángulo.



**1.** Determina sen 25.37°.

La siguiente es una posible secuencia para calcular este valor en tu calculadora.

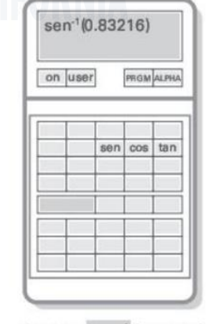



Ingresa sen 25.37°.

Éste es el resultado: 0.428462

**Caso inverso.** Dado sen $A = 0.83216$, calcula el valor del ángulo $A$.

Éste es el *caso inverso* de los ejemplos anteriores, pues ahora conocemos la función del ángulo $A$ y tenemos que determinar su valor. Para resolver casos como éste, veamos el siguiente procedimiento.




Ingresa $\text{sen}^{-1}$ (0.83216)




El valor del ángulo $A$ que vas a obtener es 56.3212°

## Evidencias de aprendizaje 9

**1.** Calcula el valor natural de cada una de las siguientes funciones.

| | | |
|---|---|---|
| sen $23.57° =$ | tan $35°40' =$ | sec $23°30' =$ |
| cot $14°17' =$ | csc $72.75° =$ | sen $85.25° =$ |
| tan $45° =$ | sen $30° =$ | cos $60° =$ |
| cos $75.25° =$ | tan $23.57° =$ | cot $66.43° =$ |
| sen $90° =$ | sen $0° =$ | sen $57° =$ |

**2.** Dado el valor de la función trigonométrica, determina el ángulo correspondiente.

| | | |
|---|---|---|
| sen $A = 0.5225$<br>$A =$ | sen $x = 0.7698$<br>$x =$ | sen $B = 0.1576$<br>$B =$ |
| cos $A = 0.8542$<br>$A =$ | cos $y = 0.2634$<br>$y =$ | cos $C = 0.5225$<br>$C =$ |
| tan $A = 2.2290$<br>$A =$ | tan $x = 19.76$<br>$x =$ | cot $y = 42.75$<br>$y =$ |



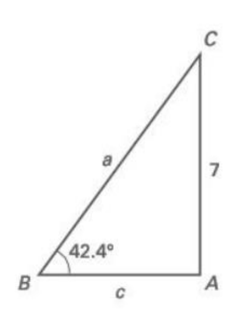
3.Concluye si hay diferencia entre 2 sen 30° y sen [(2)(30°)].

4. ¿Es lo mismo 2 tan 30° que tan 60°?

5. ¿El cos 30° es la mitad de cos 60°?

Ejemplos:

**1.** Resuelve el triángulo rectángulo de la figura.




*Solución:*

$\angle C = 90° - 42.4° = 47.6°$; ángulos complementarios

$\frac{7}{a} = \text{sen } 42.4°$, despejamos $a = \frac{7}{\text{sen } 42.4°}$

$\approx 10.3810$

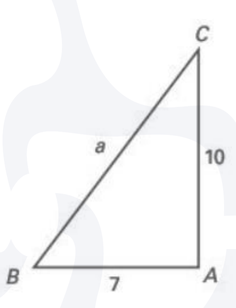
$\frac{7}{c} = \tan 42.4°$, despejamos $c = \frac{7}{\tan 42.4°}$

$\approx 7.6659$

Evidentemente, podríamos haber obtenido el cateto $c$ a partir del teorema de Pitágoras:

$$c \approx \sqrt{(10.38)^2 - (7)^2} \approx \sqrt{58.7672} \approx 7.6659$$

**2.** Resuelve el triángulo rectángulo de la figura mostrada.




*Solución:*

Calculamos la hipotenusa $a$ con el teorema de Pitágoras:

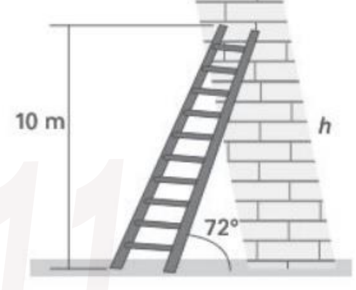
$$a = \sqrt{(10)^2 + (7)^2} = \sqrt{149} \approx 12.2065$$

$\tan B = \frac{10}{7} \approx 1.4285$, entonces,

$B = \tan^{-1}(1.4285) \approx 55.0079°$

$\angle C = 90° - 55.0079° = 34.9921°$

Una escalera de 10 m está recargada sobre una pared. ¿Qué altura alcanza si forma con el suelo un ángulo de 72°?

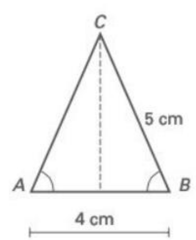


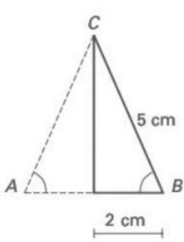

Por los datos que tenemos, la sugerencia es hacer uso de la función sen 72°. Así, tenemos que

$$\frac{h}{10} = \text{sen } 72° \quad \Rightarrow \quad h = 10 \text{ sen } 72° = 9.51 \text{ m}$$



La base de un triángulo isósceles mide 4 cm. Si cada uno de sus lados iguales mide 5 cm, calcula el valor de los ángulos iguales.



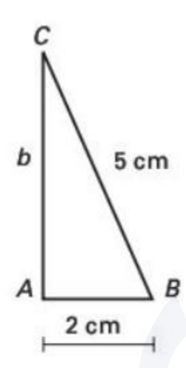

Aquí es pertinente usar la razón trigonométrica:

$\cos A = \cos B = \frac{2}{5} = 0.4$

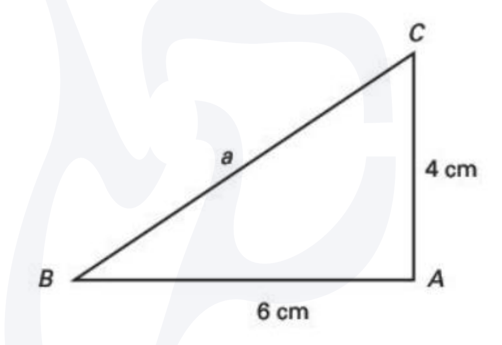
Entonces, $A = B \approx 66.4218°$

## Evidencias de aprendizaje 10

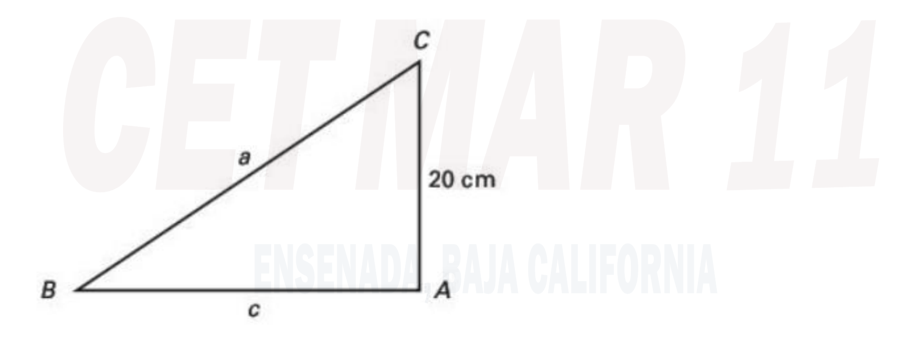
Resuelve el siguiente triángulo rectángulo, es decir, calcula el lado $b$ y los ángulos $B$ y $C$.




Resuelve el siguiente triángulo rectángulo, es decir, calcula el lado $a$ y los ángulos $B$ y $C$.




Un triángulo $BAC$ es rectángulo en $A$. Si el cateto $b = 20$ y el ángulo $B = 30°$, determina los demás elementos del triángulo.






Un obrero tiene una escalera de 12 metros. ¿Qué ángulo debe formar con el suelo para alcanzar una altura de 8 metros? Elabora un esquema de la situación.